Drei Läufer, A, B und C laufen auf parallelen Strecken (jeder läuft mit konstanter Geschwindigkeit, aber nicht unbedingt mit der gleichen Geschwindigkeit wie die anderen). Zu Beginn beträgt die Fläche des Dreiecks ABC 2 und nach 5 Sekunden 3 Flächeneinheiten. Wie groß könnte diese Fläche nach weiteren 5 Sekunden sein?

Original aus: В. В. ПРАСОЛОВ, ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ, 5-е издание, исправленное и дополненное,
Seite 314, Aufgabe 13.53 mit Lösung auf Seite 323 (<https://math.ru/lib/files/pdf/planim5.pdf>)

Nachfolgend wird ein völlig anderer Lösungsweg als im Original verfolgt. Zur Veranschaulichung wird ein Drahtmodell konstruiert, das einem kleinen Haus mit Satteldach ähnlich sieht. Gemäß Buchtitel des Originals findet das Rennen der Läufer A, B, C in einer Ebene auf parallelen geraden Bahnen mit den Namen A, B und C statt. Es wird jetzt vorausgesetzt, daß das Rennen von einer gemeinsamen Startlinie aus (Senkrechte zu den Bahnen) gestartet wurde und nun die Läufer "unterwegs" sind. Die Beobachtung des laufenden Rennens beginnt zum Zeitpunkt nach dem Start zu einem Zeitpunkt $t = 0$ und wird auch bei $t = 5$ durchgeführt.

Aufgabe ist es, eine Prognose für den Zeitpunkt $t = 10$ zu errechnen.

Die Geschwindigkeiten der Läufer auf den Bahnen für A, B und C seien v_A , v_B und v_C (alle sind positiv) und die Abstände der parallelen Läuferbahnen seien u zwischen Bahn A und B bzw. v zwischen Bahn B und C. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei Läufer A bereits um x von der Startlinie in seiner Bahn gelaufen. Entsprechend seien Läufer B und C um y bzw. z von der Startlinie entfernt. Der beobachtete Anfangszustand $t = 0$ wird im Drahtmodell durch Ordinaten auf den Läuferbahnen und senkrecht zur Ebene als Giebel eines Hauses abgebildet. Im Drahtmodell werden die Streckenzuwächse infolge positiver Läufergeschwindigkeit für zunehmendes t als ansteigende Geraden wie sinngemäß Regenrinne/Traufe und First am Dach eines Hauses dargestellt.

Die gegebene Fläche des Dreiecks ABC zum **Zeitpunkt $t=0$** ergibt sich als Bilanz von Teilflächen (Trapez, Dreieck) nach Voraussetzung zu 2 Flächeneinheiten und zum Zeitpunkt $t = 5$ zu 3 Flächeneinheiten.

Es wird in vorliegender Variante vorausgesetzt, daß im Drahtmodell die Giebelspitze/Firstpunkt für $t=0$ nach oben zeigt: z. B. $y > \max(x; z)$

Translation:

Three runners, A, B and C run on parallel tracks (each running at a constant speed, but not necessarily at the same speed as the others). At the beginning, the area of triangle ABC is 2 units and after 5 seconds it is 3 units. How large might this area be after another 5 seconds?

Original from: В. В. ПРАЗОЛОВ, BOOKS ON THE PLANNING OF THE EARTH, 5th Edition, Principle and Application,
Page 314, Task 13.53 with solution on page 323 (<https://math.ru/lib/files/pdf/planim5.pdf>)

The following is a completely different solution to the original. To illustrate this, a wire model is constructed that looks like a small house with a gable roof. According to the title of the original book,

$$\#7: \quad - \frac{v \cdot x - y \cdot (u + v) + u \cdot z - 5 \cdot (u \cdot (vB - vC) + v \cdot (vB - vA))}{2}$$

Daher die **Fläche für t = 5: (Hence the area for t = 5:)**

$$\#8: \quad - \frac{v \cdot x - y \cdot (u + v) + u \cdot z - 5 \cdot (u \cdot (vB - vC) + v \cdot (vB - vA))}{2} = 3$$

Flächendifferenz von t = 5 zu t = 0, also #8 - #3: (Area difference from t = 5 to t = 0, i.e. #8 - #3:)

$$\#9: \quad \left(- \frac{v \cdot x - y \cdot (u + v) + u \cdot z - 5 \cdot (u \cdot (vB - vC) + v \cdot (vB - vA))}{2} = 3 \right) - \left(- \frac{v \cdot x - y \cdot (u + v) + u \cdot z}{2} = 2 \right)$$

$$\#10: \quad \frac{5 \cdot (u \cdot (vB - vC) + v \cdot (vB - vA))}{2} = 1$$

Die Differenz beträgt wie vorausgesetzt 1. (The difference is, as assumed, 1.)

Für den **Flächeninhalt** von ABC zum **Zeitpunkt t = 10** folgt analog: (For the area of ABC at time t = 10, the following follows analogously:)

$$\#11: \quad \frac{x + 10 \cdot vA + y + 10 \cdot vB}{2} \cdot u + \frac{y + 10 \cdot vB + z + 10 \cdot vC}{2} \cdot v - \frac{x + 10 \cdot vA + z + 10 \cdot vC}{2} \cdot (u + v)$$

vereinfacht: (simplified:)

$$\#12: \quad - \frac{v \cdot x - y \cdot (u + v) + u \cdot z - 10 \cdot (u \cdot (vB - vC) + v \cdot (vB - vA))}{2}$$

Flächendifferenz von t = 10 zu t = 0: (Area difference from t = 10 to t = 0:)

$$\#13: \quad - \frac{v \cdot x - y \cdot (u + v) + u \cdot z - 10 \cdot (u \cdot (vB - vC) + v \cdot (vB - vA))}{2} - \left(- \frac{v \cdot x - y \cdot (u + v) + u \cdot z}{2} \right)$$

vereinfacht: (simplified:)

$$\#14: \quad 5 \cdot (u \cdot (vB - vC) + v \cdot (vB - vA))$$

Flächendifferenz von t = 10 zu t = 5: (Area difference from t = 10 to t = 5:)