$$Massenmatrix:\ \underset{M}{\leftrightarrow} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix}$$

$$Dämpfungsmatrix:\ \underset{c}{\leftrightarrow} = \underset{c_1}{\leftrightarrow} + \underset{c_2}{\leftrightarrow} + \underset{c_3}{\leftrightarrow}$$

$$\underset{c_1}{\leftrightarrow} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{c}{\leftrightarrow} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$Steifigkeitsmatrix:\ \underset{K}{\leftrightarrow} = \underset{K_1}{\leftrightarrow} + \underset{K_2}{\leftrightarrow} + \underset{K_3}{\leftrightarrow}$$

$$\underset{K_1}{\leftrightarrow} = D_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{K}{\leftrightarrow} = \begin{pmatrix} D_1 & -D_1 & 0 & 0 \\ -D_1 & D_1 + D_2 & -D_2 & 0 \\ 0 & -D_2 & D_2 + D_3 & -D_3 \\ 0 & 0 & -D_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F}{\rightarrow} = \underset{M}{\leftrightarrow} \underset{x}{\ddot{\rightarrow}} + \underset{C}{\leftrightarrow} \underset{x}{\dot{\rightarrow}} + \underset{K}{\leftrightarrow} \underset{x}{\rightarrow}$$

$$Keine\ Auslenkungen\ am\ Boden: x_1 = 0; \dot{x}_1 = 0; \ddot{x}_1 = 0;$$

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} D_1 + D_2 & -D_2 & 0 \\ -D_2 & D_2 + D_3 & -D_3 \\ 0 & -D_3 & D_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

3 DGL 2.Ordnung

Umwandeln in ein System aus 6 DGL 1.Ordnung

$$\begin{pmatrix} \underset{x}{\dot{\rightarrow}} \\ \underset{v}{\dot{\rightarrow}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{0}{\leftrightarrow} & \underset{\mathbb{I}}{\leftrightarrow} \\ -\underset{M}{\leftrightarrow}^{-1} \underset{K}{\leftrightarrow} & -\underset{M}{\leftrightarrow}^{-1} \underset{C}{\leftrightarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{x}{\rightarrow} \\ \underset{v}{\rightarrow} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \underset{M}{\leftrightarrow}^{-1} \underset{F}{\leftrightarrow} \end{pmatrix} = \underset{A}{\leftrightarrow} \underset{q}{\rightarrow} + \underset{b}{\rightarrow}$$

$$\underset{x}{\dot{\rightarrow}} = \underset{v}{\rightarrow}$$

Herleitung siehe Skript Kap. 4.5 ii) Federelement mit Dämpfung

Berechnung der Determinante von Massenmatrix nach Sarrus:

$$det \underset{M}{\leftrightarrow} = m_2 * m_3 * m_4$$

Berechnung einer Inversen Matrix unter Verwendung von Unterdeterminanten, siehe Mathematische Formelsammlung, Papula, S.197

$$\underset{M}{\leftrightarrow}^{-1} = \frac{1}{det\underset{M}{\leftrightarrow}}\begin{pmatrix} m_3m_4 & 0 & 0 \\ 0 & m_2m_4 & 0 \\ 0 & 0 & m_2m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_4} \end{pmatrix}$$

Berechnung der Elemente:

$$\underset{M}{\leftrightarrow}^{-1}\underset{F}{\leftrightarrow} = \begin{pmatrix} \frac{F_2}{m_2} \\ \frac{F_3}{m_3} \\ \frac{F_4}{m_4} \end{pmatrix}$$

$$\underset{b}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F_2}{m_2} \\ \frac{F_3}{m_3} \\ \frac{F_4}{m_4} \end{pmatrix}$$

$$-\underset{M}{\leftrightarrow}^{-1}\underset{K}{\leftrightarrow} = \begin{pmatrix} -\frac{D_1+D_2}{m_2} & \frac{D_2}{m_2} & 0 \\ \frac{D_2}{m_3} & -\frac{D_2+D_3}{m_3} & \frac{D_3}{m_3} \\ 0 & \frac{D_3}{m_4} & -\frac{D_3}{m_4} \end{pmatrix}$$

NR: Multiplikation von Matrizen, Papula S.195

$-\underset{M}{\leftrightarrow}^{-1}\underset{K}{\leftrightarrow}$:	$\begin{pmatrix} D_1+D_2 & -D_2 & 0 \\ -D_2 & D_2+D_3 & -D_3 \\ 0 & -D_3 & D_3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_4} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{D_1+D_2}{m_2} & -\frac{D_2}{m_2} & 0 \\ -\frac{D_2}{m_3} & \frac{D_2+D_3}{m_3} & -\frac{D_3}{m_3} \\ 0 & -\frac{D_3}{m_4} & \frac{D_3}{m_4} \end{pmatrix}$

Analog:

$$-\underset{M}{\leftrightarrow}^{-1}\underset{C}{\leftrightarrow}=\begin{pmatrix} -\frac{c_1+c_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & 0 \\ -\frac{c_2}{m_3} & -\frac{c_2+c_3}{m_3} & -\frac{c_3}{m_3} \\ 0 & \frac{c_3}{m_4} & -\frac{c_3}{m_4} \end{pmatrix}$$

➔ 6 DGL 1.Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \\ \dot{v_2} \\ \dot{v_3} \\ \dot{v_4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{D_1+D_2}{m_2} & \frac{D_2}{m_2} & 0 & -\frac{c_1+c_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & 0 \\ \frac{D_2}{m_3} & -\frac{D_2+D_3}{m_3} & \frac{D_3}{m_3} & -\frac{c_2}{m_3} & -\frac{c_2+c_3}{m_3} & \frac{c_3}{m_3} \\ 0 & \frac{D_3}{m_4} & -\frac{D_3}{m_4} & 0 & \frac{c_3}{m_4} & -\frac{c_3}{m_4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F_2}{m_2} \\ \frac{F_3}{m_3} \\ \frac{F_4}{m_4} \end{pmatrix}$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = D;$$
$$m_1 = m_4 = 0;\ m_2 = m_3 = m;$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0;$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c$$

➔

$$\begin{pmatrix} \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \\ \dot{v_2} \\ \dot{v_3} \\ \dot{v_4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2D}{m} & \frac{D}{m} & 0 & -\frac{2c}{m} & \frac{c}{m} & 0 \\ \frac{D}{m} & -\frac{2D}{m} & \frac{D}{m} & -\frac{c}{m} & -\frac{2c}{m} & \frac{c}{m} \\ 0 & \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} & 0 & \frac{c}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\underset{q}{\rightarrow}}=\underset{N}{\leftrightarrow}.\underset{q}{\rightarrow}$$

$$Substition\colon \underset{q}{\rightarrow} = e^{\omega t} * \underset{u}{\rightarrow};\ \dot{\underset{q}{\rightarrow}}=\omega * e^{\omega t} * \underset{u}{\rightarrow};$$

$$\omega * e^{\omega t} * \underset{u}{\rightarrow} = \underset{N}{\leftrightarrow} e^{\omega t} * \underset{u}{\rightarrow};$$

$$\omega * \underset{u}{\rightarrow} = \underset{N}{\leftrightarrow} * \underset{u}{\rightarrow};$$

$$\omega * \underset{u}{\rightarrow} - \underset{N}{\leftrightarrow} * \underset{u}{\rightarrow} = \underset{0}{\rightarrow};$$

$$(\omega * \mathbb{I} - \underset{N}{\leftrightarrow}) * \underset{u}{\rightarrow} = \underset{0}{\rightarrow}$$

Gesucht sind die Nullstellen:

$$\det\left(\mathbb{I} * \omega - \underset{N}{\leftrightarrow}\right) = \underset{0}{\rightarrow}$$

$$\det\begin{pmatrix} & & & \omega & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \omega & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & -1 \\ \frac{2D}{m} & -\frac{D}{m} & 0 & \omega + \frac{2c}{m} & -\frac{c}{m} & 0 \\ -\frac{D}{m} & \frac{2D}{m} & -\frac{D}{m} & \frac{c}{m} & \omega + \frac{2c}{m} & -\frac{c}{m} \\ 0 & -\frac{D}{m} & \frac{D}{m} & 0 & -\frac{c}{m} & \omega + \frac{c}{m} \end{pmatrix}$$

Siehe Papula S.205